28 A/ Soit f la fonction définie sur $I=[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}[$ par $f(x)=\sqrt{1+\tan x}$.

On désigne par C_f la courbe de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1. a. Montrer que f est dérivable sur $I=]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}[$ et calculer $f'(x)$.

b. Etudier la dérivabilité de f à droite en $-\frac{\pi}{4}$ et interpréter graphiquement le résultat.

c. Dresser le tableau de variation de f et construire C_f.

2. a. Montrer que f réalise une bijection de $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}[$ sur un intervalle J à préciser.

b. On désigne par g la bijection réciproque de f. Calculer $g(0)$, $g(1)$ et $g(\sqrt{2})$.

c. Construire la courbe C_g de g dans le même repère.

3. Montrer que g est dérivable sur J et que pour tout x de J, $g'(x)=\frac{2x}{x^4-2x^2+2}$.

4. Soit la suite (u_n) définie par

$$u_n=\frac{1}{n+1}\sum_{k=n}^{2n} g(k),\ n\in\mathbb{N}.$$

a. Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $g(n)\le u_n\le g(2n)$.

b. En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

B/ Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$

$$\text{par } h(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}g\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}\right) & \text{si } x>0,\\ \frac{\pi}{4} & \text{si } x=0.\end{cases}$$

1. a. Montrer que h est continue sur $\mathbb{R}_+$.

b. Monter que h est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et pour tout $x\in\mathbb{R}_+^*$, $h'(x)=\frac{-1}{2(x^2+1)}$.

2. a. Soit $x\in\mathbb{R}_+^*$. Montrer qu'il existe un réel $c\in]0,x[$ tel que $h(x)-\frac{\pi}{4}=\frac{-x}{2(c^2+1)}$.

b. En déduire que h est dérivable à droite en 0 et que $h'_d(0)=-\frac{1}{2}$.

c. Dresser le tableau de variation de h.

3. a. Montrer que l'équation $h(x)=x$ admet dans $\mathbb{R}_+$ une solution unique α et que $\alpha\in]0,1[$.

b. Montrer que pour tout réel $x\in\mathbb{R}_+$, $|h'(x)|\le\frac{1}{2}$.

4. Soit la suite (v_n) définie par

$$\begin{cases}v_0\in\mathbb{R}_+\setminus\{\alpha\},\\ \text{Pour tout } n\in\mathbb{N},\ v_{n+1}=h(v_n).\end{cases}$$

a. Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $|v_{n+1}-\alpha|\le\frac{1}{2}|v_n-\alpha|$.

b. En déduire que la suite (v_n) est convergente et donner sa limite.

Qarray.tn -Aqra Blech- Qarray.tn